Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-04

1 Utiliser les nombres premiers

Cours 1 p. 46

1. Parmi les nombres suivants, indiquer les nombres premiers et donner une décomposition en produit de facteurs premiers des nombres qui ne sont pas premiers.

a) 373

b) 4 312

c) 1 008

2. Rendre $\dfrac{4\,312}{1008}$ irréductible.

Solution

1. a) $\sqrt{373} \approx 19{,}3$ 1

373 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 qui sont les nombres premiers plus petit que 19,3.
373 est donc un nombre premier.

b) 4 312 est divisible par 2. 4 312 n'est pas un nombre premier.

4 312	2 (4 312 ÷ 2 = 2 156) ⟶ On réitère la procédure avec 2 156.
2 156	2 (2 156 ÷ 2 = 1 078) ⟶ 2 est un diviseur évident.
1 078	2 (1 078 ÷ 2 = 539)
539	7 (539 ÷ 7 = 77)
77	7 (77 = 7 × 11)
11	11 est premier, c'est la fin de la recherche.

$4\,312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$

c) 1 008 est divisible par 2. 1 008 n'est pas un nombre premier.

1 008	2 (1 008 ÷ 2 = 504)
504	2 (504 ÷ 2 = 252)
252	2 (252 ÷ 2 = 126)
126	2 (126 ÷ 2 = 63)
63	3^2 ($63 = 3^2 \times 7$)
7	7 est un nombre premier.

$1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$

2. $\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{2^3 \times 7^2 \times 11}{2^4 \times 3^2 \times 7}$ 2

$\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{7 \times 11}{2 \times 3^2}$

$\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{77}{18}$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer si un nombre N est premier :

- on utilise les critères de divisibilité pour déterminer les diviseurs évidents de N ;
- on teste si les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{N}$ divisent N.

Soit N n'a aucun diviseur autre que 1 et lui-même : N est premier.

Soit N admet un diviseur premier : N n'est pas premier.

2 Une fraction est irréductible si « elle ne se simplifie plus ». Pour rendre une fraction irréductible, on écrit la décomposition en facteurs premiers du numérateur et dénominateur, puis on utilise les règles de calculs des puissances pour simplifier la fraction. Ici on simplifie la fraction par 2^3 et 7.

À vous de jouer !

1 Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers : 821 ; 861 ; 762 ; 83 ; 1 023 ?

2 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 2 835 **b)** 1 323 **c)** 1 001 **d)** 45 600

3 Simplifier chaque fraction pour obtenir une fraction irréductible.

a) $\dfrac{540}{506}$ **b)** $\dfrac{45\,600}{7\,650}$ **c)** $\dfrac{12\,789}{5\,481}$

Exercices 32 à 38 p. 54

9782210111653_INT_001_384_Maths2nde.indb 50 02/10/2019 15:30

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

15 Choisir deux fractions composées d'au moins deux nombres négatifs. Les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser. Vérifier les résultats à la calculatrice.

16 Comment multiplier deux puissances d'un même nombre ? Par exemple, $2^5 \times 2^{-3}$.

17 Comment additionner deux racines carrées ? Par exemple, $\sqrt{8} + \sqrt{40}$.

18 Comment multiplier deux racines carrées ? Par exemple, $\sqrt{8} \times \sqrt{40}$.

19 Comment écrire un quotient sans racines carrées au dénominateur ? Par exemple, $\frac{10}{\sqrt{5}}$.

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

20 Répondre aux questions suivantes en justifiant.
a) 4 est-il un diviseur de 28 ?
b) 32 est-il un multiple de 6 ?
c) 4 divise-t-il 18 ?
d) 35 est-il divisible par 5 ?

21 **1.** Décomposer 204 et 595 en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\frac{204}{595}$.

22 Décomposer puis donner l'écriture fractionnaire ou entière en calculant à la main.
a) 2^{-5} **b)** 5^{-1} **c)** 4^{-3}

23 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
$A = 8^2 \times 8 \times 8^7$ $B = 11^{-8} \times \frac{11^7}{11^{-4}}$ $C = \frac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

24 Effectuer les calculs suivants.
a) $\frac{5}{6} + \frac{-1}{3}$ **b)** $\frac{-3}{10} \times \frac{-11}{3}$ **c)** $\frac{8}{-1} \div \frac{-4}{5}$

25 Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur des nombres suivants.
a) $\sqrt{3^2}$ **b)** $(-\sqrt{16})^2$ **c)** $\sqrt{(-7)^2}$

26 Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier.
a) $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$ **b)** $\sqrt{7} \times \sqrt{21}$

27 Déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel appartient :
a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{11}{3}$ **c)** $\frac{8}{2}$ **d)** $\sqrt{9}$ **e)** $\sqrt{11}$

Multiples et diviseurs AP

28 On s'intéresse aux nombres de trois chiffres de la forme $\overline{65u}$ où u représente le chiffre des unités.
Quelles sont les valeurs possibles de u pour obtenir :
a) un multiple de 2 ?
b) un nombre divisible par 9 ?

29 Trouver tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

30 Écrire la liste de tous les diviseurs de :
a) 32 **b)** 67 **c)** 81 **d)** 144

31 Répondre par Vrai ou Faux. Justifier.
a) Tout nombre qui a pour chiffre des unités 3 est divisible par 3.
b) Tout nombre divisible par 4 et 5 est divisible par 10.
c) Tout nombre divisible par 3 et 2 est divisible par 5.
d) Tout nombre divisible par 2 est divisible par 4.

Nombres premiers AP

32 Parmi les nombres entiers naturels suivants, chercher ceux qui sont des nombres premiers.
a) 157 **b)** 231 **c)** 311 **d)** 468

33 Parmi les nombres ci-dessous, indiquer ceux qui ne sont pas des nombres premiers.
a) 19 **b)** 169 **c)** 1 009 **d)** 127
e) 558 **f)** 615 **g)** 2 367 **h)** 14 674

34 Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers.
a) 215 **b)** 507 **c)** 1 868 **d)** 1 431

35 Pour chaque nombre entier, indiquer s'il est premier ou donner sa décomposition en produit de facteurs premiers.
a) 32 **b)** 59 **c)** 115 **d)** 187
e) 227 **f)** 303 **g)** 503 **h)** 667

36 Simplifier au maximum chaque fraction.
a) $\frac{48}{56}$ **b)** $\frac{56}{63}$ **c)** $\frac{63}{48}$ **d)** $\frac{650}{800}$

37 **1.** Décomposer 800 et 650 en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\frac{650}{800}$.

38 **1.** Décomposer 2 261 et 323 en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\frac{2261}{323}$.
3. Effectuer $\frac{2261}{323} + \frac{7}{49}$.

Résolution de problèmes arithmétiques

39 Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre, simultanément, puis un deuxième six par six, tous ensemble encore.

Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifier.

Démonstrations

40 **1.** Démontrer que si un entier est multiple de 15, alors il est aussi multiple de 3 et de 5.
2. La réciproque semble-t-elle vraie ?

41 **1.** 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.
2. En utilisant la question **1.**, démontrer que 6 335 est divisible par 7.
3. Démontrer, dans le cas général, que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x + y$ est divisible par 7.
4. En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontrer que 6 349 147 est un multiple de 7.

42 Démontrer que si a^2 est pair alors a est pair.

43 Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

44 **1.** Donner une écriture littérale des multiples de 18.
2. Démontrer que si un entier est multiple de 18 alors il est aussi multiple de 3 et de 6.
3. La réciproque est-elle vraie ?
Justifier.

Calculs avec les puissances

45 **1.** Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.
$A = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$
$B = 625 \times 512$
2. Écrire sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.
$E = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$ $\qquad F = \dfrac{25}{16}$

46 Recopier et compléter.
a) $12^{-5} = \dfrac{1}{12^{\cdots}}$ **b)** $7^{\cdots} = \dfrac{1}{7^5}$
c) $8^{-6} = \dfrac{1}{8^{\cdots}}$ **d)** $\dfrac{1}{9^{\cdots}} = 9^{-23}$
e) $1{,}5^2 = \dfrac{1}{1{,}5^{\cdots}}$ **f)** $(-7)^3 = \dfrac{1}{(-7)^{\cdots}}$

47 Écrire sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.
a) $5^2 \times 5^4$ **b)** $6^5 \times 6^{-8}$ **c)** $3^4 \times 5^4$
d) $2{,}5^{-7} \times 4{,}2^{-7}$ **e)** $-4 \times (-4)^{-7}$ **f)** $(-2)^{-3} \times (-2)^5$

48 Écrire sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.
a) $\dfrac{3^8}{3^{-4}}$ **b)** $\dfrac{6^5}{3^5}$ **c)** $\dfrac{4^6}{4^2}$
d) $\dfrac{(-4{,}5)^4}{3^4}$ **e)** $\dfrac{9^{-3}}{(-2{,}5)^{-3}}$ **f)** $\dfrac{3{,}2^{-5}}{3{,}2^{-2}}$

49 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
a) $2{,}8 \times 2{,}8^{-3}$ **b)** $\dfrac{5^{-2}}{5^{-4}}$ **c)** $\left((-3{,}7)^{-2}\right)^5$
d) $\dfrac{7^{-3}}{2^{-3}}$ **e)** $\left((5{,}6)^{-4}\right)^{-2}$ **f)** $10^7 \times 10^{-7}$
g) $(-6)^8 \times (-6)^{-3}$ **h)** $5{,}3^{-6} \times 4^{-6}$ **i)** $\dfrac{(-4{,}2)^{-5}}{(-3)^{-5}}$

50 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
$A = 8^2 \times 8^{-3} \times 8^7$
$B = 11^{-8} \times \dfrac{11^7}{11^{-4}}$
$C = \dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

Calculs avec les quotients AP

51 Effectuer les calculs suivants en détaillant les étapes et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
a) $\dfrac{42}{75} - \left(-\dfrac{22}{30}\right)$ **b)** $\dfrac{85}{4} + \dfrac{25}{-5}$
c) $\dfrac{-1}{25} - 8$ **d)** $-\dfrac{14}{27} + \dfrac{-5}{108}$

52 Effectuer les calculs et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
a) $\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{3}{-7}$ **b)** $\dfrac{5}{-7} \times \left(-\dfrac{7}{5}\right)$
c) $-15 \times \dfrac{2}{15}$ **d)** $\left(-\dfrac{8}{3}\right) \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) \times 3$

9782210111653_INT_001_384_Maths2nde.indb 55 02/10/2019 15:30

Exercices d'entraînement

Arithmétique

66 Un fleuriste dispose de 30 tulipes et 24 muscaris. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de tulipes et le même nombre de muscaris, et utiliser toutes ses fleurs. On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut faire.

1. Expliquer pourquoi le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 30 et 24.
2. Déterminer les diviseurs de 30 et 24.
3. Combien de bouquets peut-il réaliser au maximum ? Quelle est alors la composition de chaque bouquet ?

67 Dans une partie de cartes, on doit répartir entre les joueurs 180 jetons noirs et 120 jetons blancs. Chaque joueur doit recevoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.
1. Peut-il y avoir vingt joueurs ? neuf joueurs ?
2. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donner toutes les possibilités.

68 La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 406.
Quels sont ces quatre entiers ?

Démonstrations

69 On veut démontrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.

1. Combien faut-il ajouter à un entier naturel impair pour obtenir l'entier impair qui le suit ?

2. Donner les écritures littérales de deux entiers naturels impairs consécutifs.

3. Montrer que leur somme peut s'écrire $4m$, où m est un entier naturel, puis conclure.

70 n est un entier naturel.

1. Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

2. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?

3. Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

71 **Algo & Prog** On veut déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b.
1. Quelle opération permet de trouver le résultat ?
2. Quelle condition portant sur le résultat permet de conclure ?
3. Proposer un programme qui détermine, à partir de deux entiers a et b, si a est un multiple de b.

72 **Algo & Prog** Déterminer un algorithme qui permet de déterminer, à partir de deux entiers a et b, si a est un diviseur de b.

73 **Algo & Prog** **1.** Écrire un programme qui écrit les dix premiers multiples d'un entier a.
2. Modifier le programme pour qu'il détermine le plus grand multiple de a inférieur à un nombre b donné.

Démonstration

74 a est un chiffre, on veut démontrer que le nombre $\overline{a00a}$ est divisible par 143.
(Pour $a = 4$, le nombre est 4 004.)
1. Vérifier cette affirmation avec $a = 1$ puis avec $a = 2$.
2. Écrire la division euclidienne de $\overline{a00a}$ par 10.
3. Démontrer cette affirmation dans le cas général.

Calculs avec les puissances

75 Le cerveau humain est composé de 100 milliards de neurones. À partir de 30 ans, ce nombre de neurones baisse d'environ 100 000 par jour. En considérant qu'une année contient 365 jours, donner l'écriture décimale puis scientifique du nombre de neurones d'un humain âgé de 40 ans.

76 **Physique** La lumière est composée de photons qui se déplacent à la vitesse moyenne de 300 000 km par seconde. Une année-lumière correspond à la distance parcourue par un de ces photons en une année.
1. À quelle distance, en km, correspond une année-lumière ? Écrire la réponse en notation scientifique.
2. La distance du centre du Soleil au centre de la Terre est de $1{,}5 \times 10^8$ km. Exprimer cette distance en année-lumière.

77 *(D'après Brevet)* **1.** Calculer A et donner le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible.

$$A = \frac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$$

2. Écrire B sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre entier et n un nombre entier relatif : $B = \dfrac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}}$.

3. Calculer C et donner le résultat en écriture scientifique.

$$C = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{15 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-5}}$$

4. Donner les écritures décimale et scientifique de $D = \dfrac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times (10^{-3})^4}{0{,}2 \times 10^{-7}}$.

78 Donner un encadrement par deux puissances de 10 consécutives :
a) en nombre d'années, de l'âge de la Terre qui est d'environ 4,5 milliards d'années.
b) en mètre, de la largeur d'une bactérie qui peut atteindre 3 µm.
c) en Hertz, de la fréquence d'un processeur tournant à 4,1 GHz.